

悬臂边界下纤维增强复合薄板 固有频率计算及验证

薛鹏程, 李 晖, 常永乐, 闻邦椿

(东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819)

摘 要: 采用理论与实际相结合的方式,对悬臂状态下纤维增强复合薄板的固有频率进行了计算及验证。首先,针对纤维增强复合薄板的结构特点,考虑了纤维方向的影响,对其进行了理论建模。然后,基于正交多项式法来表示振型函数,并通过 Ritz 法对该类型复合薄板的固有频率进行求解。最后,搭建了该类型复合薄板结构的固有特性测试系统,并以 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板为例,对其固有频率进行了测试。验证结果表明:基于正交多项式法的纤维增强复合薄板固有频率计算结果与实验结果的相对误差在 2.2%~9.7% 之间,进而验证了所提出的固有频率计算方法的正确性。

关 键 词: 纤维增强; 复合薄板; 固有频率; 悬臂边界; 正交多项式法

中图分类号: V214.3⁺3; TB535

文献标志码: A

Natural frequency calculation and validation of fiber reinforced composite thin plate under cantilever boundary

XUE Peng-cheng, LI Hui, CHANG Yong-le, WEN Bang-chun

(School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: The natural frequencies of fiber reinforced composite thin plate (FRCP) under cantilever boundary condition were calculated and verified based on the way of combination of theory with experiment. Firstly, according to the structural features of FRCP, its theoretical model was established by considering the influence of fiber orientation. Then, the modal shape functions were expressed by orthogonal polynomial method and consequently natural frequencies of FRCP were theoretically calculated by Ritz method. Finally, TC500 fiber/epoxy composite thin plate was taken as a study object, and its frequency results were measured based on the established natural characteristic experiment system of FRCP. It was found by comparison that the natural frequencies calculated based on the orthogonal polynomial method had a good agreement with the experimental results, and the relative errors were within the range of 2.2%—9.7%, thus the effectiveness of above method had been verified.

Key words: fiber reinforced; composite thin plate; natural frequency;
cantilever boundary; orthogonal polynomial method

纤维增强复合材料比强度高、比模量高、热稳定性好,还有一定的阻尼减振能力,因此被广泛应

用于航空、航天、汽车工业、船舶、体育器械与兵器工业等重要领域^[1-2]。目前,工程实际中存在大量

收稿日期:2015-12-26

基金项目:国家自然科学基金(51505070,51375079)

作者简介:薛鹏程(1992—),男,河北辛集人,硕士,主要从事复合材料及结构振动分析与测试。

通讯作者:李晖(1982—),男,内蒙古丰镇人,讲师,博士后,主要从事阻尼减振技术研究。E-mail:lh200300206@163.com

通过该类型材料制成的典型复合薄板结构件,它们通常处于悬臂约束的边界条件下,如太阳能帆板、航空发动机风扇叶片以及大型风力机叶片等。随着它们的结构越来越复杂,工作环境越来越苛刻,其振动问题也越来越突出,由此引发的振动超标、磨损、疲劳失效等故障问题也越来越突出^[3-6],因此,研究悬臂边界下纤维增强复合薄板(fiber reinforced composite thin plate, FRCP)的振动特性有着重要的工程及学术意义^[7]。

固有频率是深入研究结构系统振动特性的基础,其对于理论分析、动态设计、故障诊断都有着重要的指导作用^[8]。长期以来,国内外学者在研究纤维增强复合薄板的固有特性方面做了很多的工作,已经取得了阶段性的研究成果。例如, Mohan 和 Kingsbury^[9]研究了硼纤维/树脂复合薄板结构的固有频率,采用 Galerkin 法求解了悬臂状态下的固有频率。研究表明,固有频率在很大程度上受到弹性主轴方向的影响,对于正交各向异性复合薄板的固有特性分析,采用传统的各向同性分析方法无法对其进行准确预测。Nair 和 Durvasula^[10]对复合薄板固有特性也进行了研究,他们在 Ritz 法中用梁特征函数表示振型,求出了除悬臂边界条件以外的不同边界条件下复合薄板的固有频率近似解。Sivakumaran^[11]也使用 Ritz 法获得了 T300 石墨纤维增强复合薄板在自由边界条件下的固有频率,并将复合结构系统面内位移和面外位移函数表示成幂级数的形式,还与有限元结果和实验结果进行对比,该计算结果与有限元仿真结果以及实验结果相吻合。Leissa 等^[12]基于经典层合板理论,采用 Ritz 法获得了不同铺层和不同纤维铺设角度下,玻璃纤维、碳纤维和石墨纤维增强复合薄板在简支边界条件下的固有频率,并讨论了材料、铺层数和纤维铺设角度对固有频率的影响。Qatu^[13]在 Ritz 法中采用代数多项式法求解了不同边界条件下玻璃/树脂和石墨/树脂复合薄板的固有频率和振型,并研究了固有频率的变化与铺设角度的关系,但并未与实验测试结果进行对比。杨和振等^[14]利用锤击和激振器法,在不同温度条件下,对悬臂状态下复合薄板的振动特性进行测试,并采用随机子空间法识别方法获得了固有频率、阻尼以及振型,进而分析了环境条件变化对上述参数的影响。漆文凯等^[15]对自由和悬臂两种边界条件下的无损伤和有开孔损伤的 T300/BMP316 复合薄板开展了实验研究,获得相应的固有频率和模态阻尼,并分析了开孔

位置、开孔大小等损伤参数对其振动特性的影响规律,但并未从理论上给出解释。史冬岩等^[16]基于改进傅里叶级数方法(IFSM)对石墨/环氧树脂复合薄板结构的固有特性进行了研究,并采用 Rayleigh-Ritz 法求解其固有频率,但并未获得悬臂状态下的计算结果。

虽然人们已经对纤维增强复合薄板的固有特性进行了深入研究,但上述研究工作绝大部分针对理想的边界条件,在悬臂状态下通过理论结合实际的方法对其固有特性进行研究的较少。且绝大多数文献得出的频率结果多为无量纲频率值,其并未得到实验数据验证。为此,有必要继续研究悬臂边界下该类型复合材料结构的固有特性问题。

本文采用理论与实际相结合的方式,对悬臂边界下纤维增强复合薄板的固有频率进行了计算及验证。首先,针对纤维增强复合薄板的结构特点,考虑了纤维方向的影响,并对其进行了理论建模。然后,基于正交多项式法来表示振型函数,并通过 Ritz 法对该类型复合薄板的固有频率进行求解。最后,搭建了该类型复合薄板结构的固有特性测试系统,并以 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板为例,测试获得了其固有频率。研究表明,基于正交多项式法的纤维增强复合薄板固有频率计算结果,与实验结果的相对误差在 2.2%~9.7%之间,进而验证了所提出的固有频率计算方法的正确性。

1 基于正交多项式法的纤维增强复合薄板固有频率计算

1.1 理论建模

所研究的纤维增强复合薄板是由 n 层具有正交各向异性特点的纤维和基体材料组合而成的,如图 1 所示。假设各层之间是牢固黏结的,层间无滑移,无相对位移,因此不考虑层间耦合效应。首先,将其中面作为参考平面,并建立 xOy 坐标系。纤维纵向与整体坐标系 x 轴方向的夹角为 θ ,板长为 a ,板宽为 b ,板厚为 h ,每一层位于 z 坐标轴较低表面 h_{k-1} 和较高表面 h_k 之间,每层的厚度均相同。图中的 1 代表纤维纵向,2 代表纤维横向,3 代表垂直于 1-2 平面的方向。假设纤维增强复合薄板纤维纵向的弹性模量为 E_1 ,纤维横向的弹性模量为 E_2 ,1-2 平面内的切变模量为 G_{12} ,1 方向作用应力引起 1,2 方向应变的泊松比为 ν_{12} ,2 方向作用应力引起 1,2 方向应变的泊松比为 ν_{21} 。

由于纤维增强复合薄板多为对称层合结构,

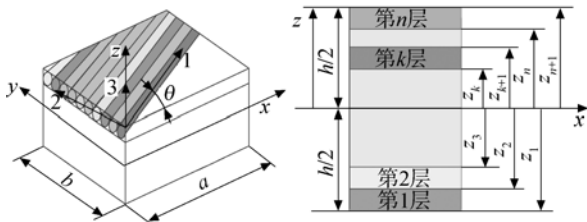


图1 纤维增强复合薄板理论模型

Fig. 1 Theoretical model of FRCP

其拉伸与弯曲之间不存在耦合关系,因此面内位移和面外位移是解耦的,根据小挠度薄板理论,将位移场写为如下形式^[17]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 u, v, w 代表板内任意一点的位移; u_0, v_0, w_0 代表板中面位移; t 表示时间。

根据薄板理论可知,正应变 ϵ_z 和剪应变 γ_{yz} , γ_{xz} 都为 0,即 $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$,由应变和位移的关系,板内任意一点的应变可以表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

对于正交各向异性材料,材料主轴方向的应力-应变关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \quad (4)$$

当纤维纵向与整体坐标系 x 轴方向有一定夹角 θ 时,用应力-应变转轴公式计算得到第 k 层板在整体坐标系下的应力-应变关系如下

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \end{aligned} \quad (6)$$

式中 k 表示复合薄板的第 k 层, θ_k 表示第 k 层板的纤维纵向与整体坐标系 x 轴的夹角。

薄板弯曲振动的动能和应变能可以分别用式(7)和式(8)表示

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dAdz \\ U &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dAdz \end{aligned} \quad (7)$$

式中 ρ 为薄板密度, A 为薄板面积。同时将上面得出的位移公式(1),应变公式(2)以及应力公式(5)代入动能公式(7)和应变能公式(8)中,可以得到用中面位移 w_0 表示的复合薄板的动能和应变能

$$E_k = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dAdz \quad (9)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left[\bar{Q}_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2\bar{Q}_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4\bar{Q}_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4\bar{Q}_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4\bar{Q}_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dAdz \end{aligned} \quad (10)$$

1.2 Ritz 法求解

由于解析法很难得到悬臂板的精确解,在本文中采用 Ritz 法。根据 Ritz 法,中面位移可以表示成如下形式^[18]

$$w_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t) \quad (11)$$

其中 c_{mn} 是待定参数; $P_m(\xi)$ 和 $P_n(\eta)$ 是基函数; ω 是固有圆频率, M, N 为通过 Ritz 法截取的项数.

在本文中,通过对满足边界条件的多项式函数进行正交化处理来获得一系列的正交多项式

$$\begin{aligned} P_1(\xi) &= \chi(\xi), \quad P_1(\eta) = \kappa(\eta) \\ P_2(\zeta) &= (\zeta - B_2)P_1(\zeta) \\ P_k(\zeta) &= (\zeta - B_k)P_{k-1}(\zeta) - C_k P_{k-2}(\zeta) \\ \zeta &= \xi, \eta, \quad k > 2 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 B_k 和 C_k 为系数函数,其表达式分别为

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 \zeta d\zeta}{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta} \\ C_k &= \frac{\int_0^1 W(\zeta) P_{k-1}(\zeta) P_{k-2}(\zeta) \zeta d\zeta}{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-2}(\zeta)]^2 d\zeta}, \\ \zeta &= \xi, \eta \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $W(\zeta)$ 是权函数,通常取 $W(\zeta)=1$. 而 $\chi(\xi)$ 和 $\kappa(\eta)$ 是满足固支、简支、自由等边界条件的多项式函数,且具有如下的形式

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \xi^p(1-\xi)^q, \quad \kappa(\eta) = \eta^r(1-\eta)^s \\ \xi &= x/a, \quad \eta = y/b \end{aligned} \quad (14)$$

由于本文关注的是悬臂边界条件,所以取 $p=2, r=0, q=0, s=0$. 将式(11)代入动能公式(9)和应变能公式(10)中,得到用待定参数 c_{mn} 表示的应变能和动能表达式,令应变能中的谐波分量 $\sin(\omega t)=1$, 动能中的谐波分量 $\cos(\omega t)=1$, 可以得到最大应变能 $U^{\max}$ 和最大动能 $E_k^{\max}$ 的表达式

$$\begin{aligned} E_k^{\max} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 \left[z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} P_n \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{dP_n}{dy} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m P_n \right)^2 \right] dAdz \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} U^{\max} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right]^2 + \\ &\quad 2\bar{Q}_{12} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right] \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right] + \\ &\quad 4\bar{Q}_{66} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right] \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} \cdot \frac{dP_n}{dy} \right] + \\ &\quad 4\bar{Q}_{26} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right] \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} \cdot \frac{dP_n}{dy} \right] + \\ &\quad \bar{Q}_{22} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right]^2 + \\ &\quad 4\bar{Q}_{66} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} \cdot \frac{dP_n}{dy} \right]^2 \Big] dAdz \end{aligned} \quad (16)$$

然后将能量函数 L 表示成如下形式

$$L = E_k^{\max} - U^{\max} \quad (17)$$

求解纤维增强复合薄板的固有特性问题,即是求解使 L 有最小值的所有待定参数,即有下式

$$\frac{\partial L}{\partial c_{mn}} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

将式(17)代入最小化条件式(18)中,可以得到下列特征值问题

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (19)$$

其中 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为结构系统的对称刚度矩阵和对称质量矩阵,特征向量 $\mathbf{q} = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{mn}]^T$.

此时, $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 中的元素是所有待定参数 c_{mn} 的系数. 为保证式(19)有解,需要系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (20)$$

这样就可以求得各阶模态的固有频率值. 在式(11)中, M, N 取值越大, 则固有频率计算结果就越精确, 通常取 $M=N=8$ 即可达到足够的精度.

2 纤维增强复合薄板固有频率计算流程

本文第 1 节明确了基于正交多项式法来表示的振型函数, 并通过 Ritz 法求解纤维增强复合薄板固有频率的原理, 接下来利用 Matlab 软件, 编写了相应的计算程序, 并提出计算纤维增强复合薄板固有频率的流程, 可分为如下几个步骤:

1) 输入纤维增强复合薄板的几何参数和材料参数

首先, 需要给出纤维增强复合薄板的长度、宽度、厚度及每层铺设角度等几何参数, 然后, 输入纤维纵向和纤维横向的弹性模量、切变模量、泊松比和密度等材料参数, 为后续动能和应变能的计算做好准备.

2) 基于正交多项式法, 计算获得最大动能

将位移公式(1)代入动能公式(7)中, 得到用中面位移 w_b 表示的动能的一般表达式, 然后基于正交多项式法表示振型函数, 并且令表达式中的谐波分量 $\cos(\omega t)=1$, 即可得到最大动能的表达式 $E_k^{\max}$.

3) 基于正交多项式法, 计算获得最大应变能

在考虑纤维纵向与整体坐标系 x 轴方向夹角 θ 的基础上, 利用应力-应变转轴公式计算获得每一铺层的应力-应变表达式(5), 再将应力、应变

表达式代入式(8)中即可获得每一层对应用中面位移 w_0 表示的应变能结果. 然后, 将每一层的应变能进行叠加, 即可得到总应变能的表达式. 最后基于正交多项式法表示振型函数, 并且令表达式中的谐波分量 $\sin(\omega t) = 1$, 完成最大应变能表达式 $U^{\max}$ 的获取.

4) 采用 Ritz 法求解固有频率

将上述步骤中计算获得的最大动能 $E_k^{\max}$ 和最大应变能 $U^{\max}$ 代入式(17)中, 可以计算获得能量函数 L 的表达式. 根据 Ritz 法, 将能量函数 L 对所有待定参数求偏导, 可以得到复合薄板振动的特征方程(19), 求解此特征值问题即得到纤维增强复合薄板的固有频率. 具体计算纤维增强复合薄板固有频率的流程图 2 所示.

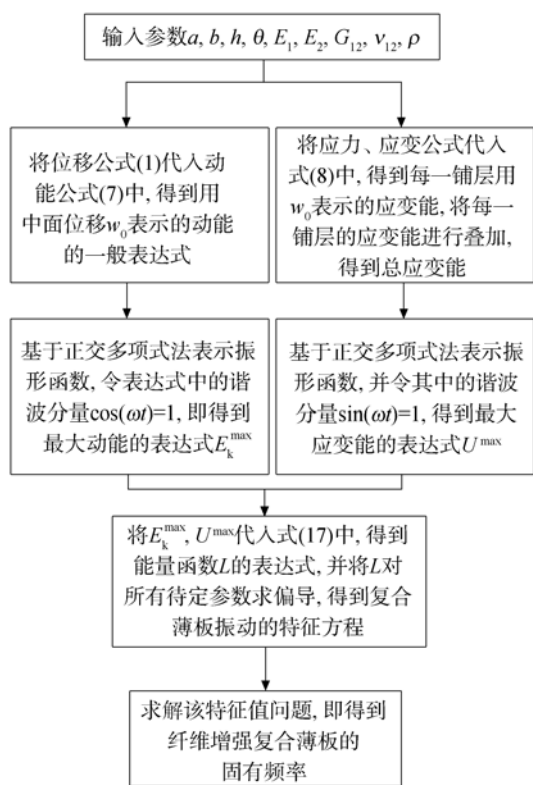


图2 纤维增强复合薄板固有频率计算流程

Fig. 2 Calculation procedure of natural frequency of FRCP

3 实验验证

本文以 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板为研究对象, 对其固有频率进行了测试, 其整体长、宽、厚分别为 $130\text{ mm} \times 95\text{ mm} \times 1.64\text{ mm}$, 纤维纵向弹性模量 $E_1 = 119\text{ GPa}$, 纤维横向弹性模量 $E_2 = 8.7\text{ GPa}$, 切变模量 $G_{12} = 4\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu_{12} = 0.32$, 质量为 3 g , 密度 $\rho = 1618\text{ kg/m}^3$. 该类型复

合薄板为对称正交铺设, 即 $[(90^\circ/0^\circ)_2 90^\circ/0^\circ/90^\circ (0^\circ/90^\circ)_2]$, 共有 11 层, 每个铺层具有相同的厚度和纤维体积分.

为了验证本文所提出的悬臂边界下纤维增强复合薄板固有频率计算方法的正确性, 搭建图 3 所示的实验系统来测试其固有频率.

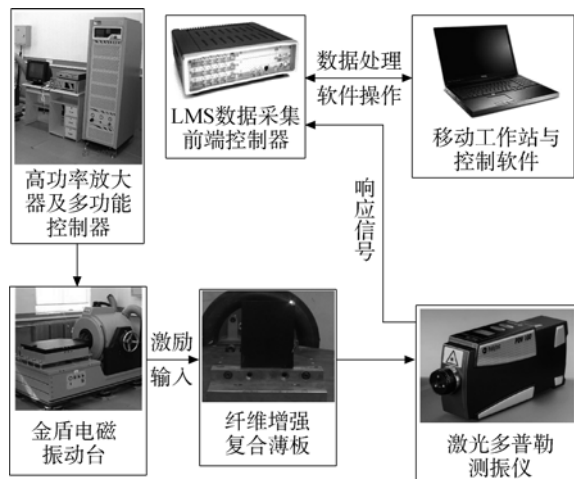


图3 纤维增强复合薄板固有频率测试系统

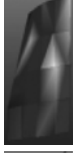
Fig. 3 Natural frequency experiment system of FRCP

首先, 采用金质电磁振动台对该类型复合薄板进行激励, 使用非接触激光多普勒测振仪来测试其振动响应, 并通过采集控制器对激励信号和响应信号进行实时采集, 通过扫频测试方法可获得前 5 阶固有频率结果, 如表 1 所示. 然后, 在上述固有频率处, 利用电磁振动台激发其达到共振状态, 并通过移动激光点的方式来获得每一阶模态振型, 振型结果一并列入表 1 中. 同时, 为了便于比较, 将通过 Matlab 程序获得的纤维增强复合薄板固有频率计算结果与振型结果也列入表 1 中, 并对其误差进行详细分析.

通过与实验结果进行对比验证可知, 基于正交多项式法的纤维增强复合薄板固有频率计算结果与实验结果的误差在 $2.2\% \sim 9.7\%$ 之间, 处于误差允许的范围, 进而验证了理论计算方法的正确性, 利用本文所提出计算方法可以较好地实现悬臂边界下该类型复合薄板固有频率的分析与预测. 但仍有必要对上述误差原因进行分析, 其可能来自于理论建模和实验测试两个方面. 其中, 理论误差包括在建模过程中没有考虑横向切应力、纤维排列不规则、界面缺陷、残余应力以及复合材料参数分散性的影响; 而实验误差也客观存在, 例如测试时边界条件(夹具夹紧程度)、仪器灵敏度漂移、实验方法等造成的影响.

表 1 计算和测试获得的纤维增强复合薄板前 5 阶固有频率和模态振型

Table 1 The first 5 natural frequencies and modal shapes of FRCP obtained by calculation and experiment

模态阶次	测试频率 f_e /Hz	计算频率 f_c /Hz	相对误差 $(f_c - f_e / f_e) / \%$	测试振型	计算振型
1	84.5	86.5	2.37		
2	174.0	158.7	8.79		
3	506.5	541.6	6.93		
4	671.8	656.6	2.26		
5	1216.5	1333.6	9.63		

4 结 论

本文采用理论与实际相结合的方式,对悬臂状态下纤维增强复合薄板的固有频率进行了计算及验证.具体工作包括:

1) 基于小挠度薄板理论推导了具有 k 层纤维增强复合薄板的应变能和动能,计算了悬臂状态下纤维增强复合薄板的固有频率,该方法可以对多层层合板及任意铺设角度下复合薄板固有频率进行计算.

2) 给出了计算纤维增强复合薄板固有频率的具体流程.主要包括输入纤维增强复合薄板的几何参数和材料参数、基于正交多项式法获得动能和最大动能、获得应变能和最大应变能、使用 Ritz 法求解固有频率等 4 个关键步骤.

3) 以 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板为研究对象,计算获得了其固有频率,并与测试结果进行了对比,相对误差在 2.2%~9.7% 之间,验证了理论计算方法的正确性.

参考文献:

[1] Mallick P K. Fiber-reinforced composites: materials, manu-

facturing, and design[M]. Boca Raton, US: The Chemical Rubber Company Press, 2007.

[2] 沈观林. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[3] 齐红宇, 温卫东, 崔海涛. 含孔复合材料层合板疲劳寿命预测研究[J]. 航空动力学报, 2003, 18(5): 658-661.

QI Hongyu, WEN Weidong, CUI Haitao. Fatigue life prediction of notched composite material laminates[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(5): 658-661. (in Chinese)

[4] Kaw A K. Mechanics of composite materials[M]. Boca Raton, US: The Chemical Rubber Company Press, 2005.

[5] 徐颖, 温卫东, 崔海涛. 复合材料层合板疲劳逐渐累积损伤寿命预测方法[J]. 航空动力学报, 2007, 22(4): 602-607.

XU Ying, WEN Weidong, CUI Haitao. Progressive fatigue damage analysis method of laminated composites[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(4): 602-607. (in Chinese)

[6] 温卫东, 崔海坡, 徐颖. T300/BMP-316 复合材料板冲击损伤研究[J]. 航空动力学报, 2007, 22(5): 749-754.

WEN Weidong, CUI Haipo, XU Ying. Research on impact damage of T300/BMP-316 composite laminates[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(5): 749-754. (in Chinese)

[7] Morgan P. Carbon fibers and their composites[M]. Boca Raton, US: The Chemical Rubber Company Press, 2005.

[8] Weaver W, Timoshenko S P, Young D H. Vibration problems in engineering[M]. Hoboken, US: Wiley, 1990.

- [9] Mohan D, Kingsbury H B. Free vibrations of generally orthotropic plates[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1971, 50(1): 266-269.
- [10] Nair P S, Durvasula S. Vibration of generally orthotropic skew plates[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1974, 55(5): 998-1002.
- [11] Sivakumaran K S. Natural frequencies of symmetrically laminated rectangular plates with free edges[J]. Composite Structures, 1987, 7(3): 191-204.
- [12] Leissa A W, Narita Y. Vibration studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates[J]. Composite Structures, 1989, 12(2): 113-132.
- [13] Qatu M S. Free vibration of laminated composite rectangular plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28(8): 941-954.
- [14] 杨和振, Park Han-il, 李华军. 温度变化下复合材料层合板的试验模态分析[J]. 复合材料学报, 2008, 25(2): 149-155.
- YANG Hezhen, Park Han-il, LI Huajun. Experimental modal analysis of the composite laminates with temperature variation[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 25(2): 149-155. (in Chinese)
- [15] 漆文凯, 程博, 刘磊. 复合材料层合板的振动模态试验研究[J]. 航空发动机, 2013, 39(6): 53-58.
- QI Wenkai, CHENG Bo, LIU Lei. Research of vibration modal experiment for composite laminates [J]. Aero-engine, 2013, 39(6): 53-58. (in Chinese)
- [16] 史冬岩, 王青山, 石先杰, 等. 任意边界条件下正交各向异性薄板自由振动特性分析[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(3): 434-438.
- SHI Dongyan, WANG Qingshan, SHI Xianjie, et al. Free vibration analysis of orthotropic thin plates in general boundary conditions[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2014, 48(3): 434-438. (in Chinese)
- [17] Hyer M W. Stress analysis of fiber-reinforced composite materials[M]. Lancaster: DEStech Publications Inc., 2009.
- [18] Chakraverty S. Vibration of plates[M]. Boca Raton: The Chemical Rubber Company Press, 2009.

(编辑: 陈 越)